PS2315 Abril-Julio 2016
Dpto. Procesos y Sistemas
Universidad Simón Bolívar
Tarea 6/7

.

- Leer Kamen y Heck: capitulo 8,
- Fecha de entrega: lunes 30 de mayo a las 9:30 am en Dpto. Procesos y Sistemas.
- Nota: i) Cada tarea debe estar plenamente identificada con Nombre, Apellido y Carnet.. ii) en cada problema debe mostrarse tanto su enunciado como su solución, ambas bien redactadas y nítidamente presentadas. iii) las tareas son individuales (pueden discutir entre ustedes las soluciones; sin embargo, no se aceptarán soluciones o argumentos "idénticos"). Violación a esta regla implicará NOTA CERO a todos los involucrados sin derecho a reclamo alguno. iv) Todos los problemas de la 2da parte (que implican uso de Scilab) son obligatorios (de lo contrario tendrán CERO en la tarea).

1. (Teorema de Cayley-Hamilton). Este es un resultado de álgebra lineal de gran utilidad en métodos numéricos y sistemas lineales de control. No es complicado entender su significado y uso; por lo tanto, lo consideramos como un ejercicio que tiene también el objetivo de que el estudiante adquiera confianza en el manejo y aplcación de resultados matemáticos en la solución de problemas reales de ingeniería de sistemas.

   Puede suponer que tenemos un sistema P, LIT, dimensión n y descrito en variables de estados por

$$\begin{aligned} \sigma x(\lambda) &= Ax(\lambda) + Bu(\lambda) \\ y(\lambda) &= Cx(\lambda) + Du(\lambda) \\ \lambda &\in T, A \in R^{n\times n} \end{aligned}$$

   $A \in R^{n\times n}$ con **polinomio característico**

$$\begin{aligned} \chi_A(\gamma) &= \det[\gamma I_n - A] \\ &= \gamma^n - \alpha_{n-1}\gamma^{n-1} - \alpha_{n-2}\gamma^{n-2} - \cdots - \alpha_1\gamma - \alpha_0 \end{aligned}$$

   Las raices de la **ecuación característica** de A

$$\chi_A(\gamma) = 0$$

   son los autovalores o valores característicos de A (o los polos de $P\left[\begin{array}{cc} A & B \\ C & D \end{array}\right]_x^n$) o espectro de A

$$\begin{aligned} espec(A) &= \{\gamma \in C : \chi_A(\gamma) = 0\} \\ &= \{p_1, p_2, \cdots, p_n\} \subset C \end{aligned}$$

Teorema de Cayley-Hamilton: Toda matriz $A \in R^{n\times n}$ satisface su ecuación característica. O sea

$$\begin{aligned} A^n - \alpha_{n-1}A^{n-1} - \alpha_{n-2}\gamma A^{n-2} - \cdots - \alpha_1 A - \alpha_0 I_n &= 0 \\ \left.\chi_A(\gamma)\right|_{\gamma=A} &= 0 \end{aligned}$$

(a) Considere el sistema de tiempo discreto P dado por

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} x(k) \end{aligned}$$

1. Determine la ecuación característica de A
2. Verifique que A satisface su ecuación característica.
3. Exprese A^{n+1} en términos de $I_n, A, A^2, \cdots, A^{n-1}$.
4. Exprese A^2, A^3, A^4, A^5 como combinación lineal solo de I_2 y A.
5. Usando división de polinomios sabemos que dados dos polinomios $n(\gamma), d(\gamma) \in R[\gamma]$, existen polinomios $q(\gamma), r(\gamma)$ tales que

$$n(\gamma) = q(\gamma)\, d(\gamma) + r(\gamma)$$

con $0 \leq grad(r) < grad(d)$.
Si $d(\gamma) = \chi_A(\gamma)$, entonces

$$\begin{aligned} n(A) &= q(A)\,\chi_A(A) + r(A) \\ &= r(A) \end{aligned}$$

Usando este resultado, encuentre A^{12}.

2. Recuerden que bajo ciertas condiciones sobre $x \in R$, puede demostrarse que

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^n + \cdots$$

En consecuencia desde el punto de vista formal, para una matriz $A \in R^{n\times n}$ se tiene que

$$\begin{aligned} [sI_n - A]^{-1} &= \frac{1}{s}\left[I_n - A/s\right]^{-1} \\ &= \frac{1}{s}\left\{I_n + A/s + A^2/s^2 + A^3/s^3 + \cdots\right\} \end{aligned}$$

(a) En base a lo visto y recordando que la matriz transición de estados $\Phi(t)$ está dada po r$\Phi(t) = L^{-1}\left[[sI_n - A]^{-1}\right]$, demuestre que

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= I_n + At + A^2\frac{t^2}{2¡} + A^3\frac{t^3}{3¡} + \cdots \\ &= e^{At}, t \geq 0. \end{aligned}$$

(b) Usando el Teorema de Cayley-Hamilton demuestre que la matriz transición de estados puede escribirse como

$$e^{At} = f_0(t)\, I_n + f_1(t)\, A + f_2(t)\, A^2 + \cdots + f_{n-1}(t)\, A^{n-1}$$

(Exprese cada f_i como una serie que involucra los coeficientes del polinomio característico de A). Ayuda: No le tenga miedo a nada y confíe en Ud. mismo.

(c) *(Teorema de Sylvester) Resulta que es posible calcular las funciones $f_i(t), i = 0, 1, \cdots, n-1,$ en forma cerrada (no como una serie). Si una matriz $A \in R^{n\times n}$ cumple con una ecuación matricial de la forma*

$$\Psi(A) = f_0 I_n + f_1 A + f_2 A^2 + \cdots + f_{n-1} A^{n-1}$$

para alguna función matricial $\Psi(A)$ dada, y si $p \in espec(A)$, entonces

$$\Psi(p) = f_0 + f_1 p + f_2 p^2 + \cdots + f_{n-1} p^{n-1}$$

y si p tiene multiplicidad ν (o sea, A tiene v polos o autovalores en $s = p$), entonces se cumple que

$$(\nu\text{−ecuaciones}) \left\{ \begin{aligned} \Psi(p) &= f_0 + f_1 p + f_2 p^2 + \cdots + f_{n-1} p^{n-1} \\ \tfrac{d}{dr}\Psi(r)\Big|_{r=p} &= f_1 + 2 f_2 p + 3 f_3 p^2 + \cdots + (n-1)\, f_{n-1} p^{n-2} \\ \tfrac{d^2}{dr^2}\Psi(r)\Big|_{r=p} &= 2 f_2 + 6 f_3 p + \cdots + (n-1)(n-2)\, f_{n-1} p^{n-3} \\ &\vdots \\ \tfrac{d^{\nu-1}}{dr^{\nu-1}}\Psi(r)\Big|_{r=p} &= (\nu-1)! f_{\nu-1} + \nu! f_\nu p + \tfrac{(\nu+1)!}{2!} f_{\nu+1} p^2 \cdots + \tfrac{(n-1)!}{(\nu-\nu)!} f_{n-1} p^{n-\nu} \end{aligned} \right.$$

Plantee las ecuaciones que debe resolver para determinar las funciones $f_i(t), i = 0, 1, \cdots, n-1$, y calcular la matriz transición de estados

$$e^{At} = f_0(t)\, I_n + f_1(t)\, A + f_2(t)\, A^2 + \cdots + f_{n-1}(t)\, A^{n-1}$$

si :

1. todos los polos p de $P \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_x^n$ son distintos entre si,
2. todos los polos p de $P \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_x^n$ son distintos entre si, excepto p_1 que tiene multiplidad ν.
3. Empleando el teorema de Sylvester, determine la matríz transición de estados del sistema P de tiempo conmtinuo descrito por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

3. Empleando el teorema de Sylvester, determine la trayectoria natural estados del sistema P de tiempo conmtinuo descrito por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

cuando $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^{tr}$.

4. (Interpretación y uso del concepto de modos de un sistema). Un sistema P, LTI y de tiempo discreto está descrito por

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ a_0 & a_1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(k) \\ x(0) &\in R^2 \ (desconocido) \end{aligned}$$

Nos dicen que $u(k) = 0, k \geq 0$, y que la respuesta natural del sistema es

$$y(k) = 8(-1)^k - 5(-2)^k, k \geq 0.$$

(a) ¿Es este sistema asintóticamente estable? ¿Por qué?

(b) Determine el valor de las constantes $a_0, a_1 \in R$.

(c) (Hay que pensar) Determine $x_1(k)$ y $x_2(k)$ en forma cerrada (fórmulas)

5. Un sistema P con entrada u y salida y, invariante en el tiempo y descrito por

$$\begin{aligned} \sigma x(\lambda) &= f(x, u), \lambda \in T \\ y(\lambda) &= g(x, u) \end{aligned}$$

se dice ser controlable si para **cualquier estado inicial** $x(0) \in R^n$ en $\lambda = 0$, existe una señal de entrada $u \in U$ tal que esta conducir{a al sistema hasta cualquier otro estado $x_f \in R^n en$ un intervalo finito de tiempo. O sea, si ϕ es la función transición de estados de P, esto es: para cada $\lambda \geq 0$,

$$x(\lambda) = \phi\left(\lambda, 0, x(0), u_{[0,\lambda)}\right)$$

entonces, P es controlable si para todo $x_i = x(0) \in R^n$, para todo $x_f \in R^n$, existe un $\lambda_f < \infty$ y una entrada $u \in U$ (depende de x_i y x_f) tal que

$$x_f = x(\lambda_f) = \phi\left(\lambda_f, 0, x_i, u_{[0,\lambda_f)}\right)$$

Un sistema de tiempo discreto P está descrito en variables de estados por

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x(k) \end{aligned}$$

(a) Suponga que $x_1(0) = 1$ y $x_2(0) = 1$. ¿Puede este sistema ser conducido al estado $x_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ en un paso? De ser posible, determine el valor $u(0)$ correspondiente.

(b) Repita la parte (a) si $x_1(0) = -6$ y $x_2(0) = 2$.

(c) Establezca condiciones generales sobre el estado inicial $x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$ que deben cumplirse para que el sistema pueda ser conducido hasta el estado $x(1) = \begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(d) Sea $x_1(0) = 4$ y $x_2(0) = -10$. Determine $u(0)$ y $u(1)$ tal que

$$x_f = x(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \phi\left(2, 0, x(0), u_{[0,2)}\right)$$

(e) Un sistema de tiempo discreto P está descrito en variables de estados por

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x(k) \end{aligned}$$

Encuentre la señal de entrada $u_{[0,2)} = \{u(0), u(1)\}$ que conducirá al sistema P desde el estado inicial $x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$ hasta el estado $x(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (en dos pasos). Exprese $u(0)$ y $u(1)$ en términos de $x_1(0)$ y $x_2(0)$.

(f) Un sistema de tiempo discreto P está descrito en variables de estados por

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x(k) \end{aligned}$$

Suponga que el estado inicial del sistema $x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Demuestre que no es posible encontrar una señal u que pueda conducir el sistema hasta el estado $x_f = x(k) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ para cualquier $k \geq 0$. (Use el Teorema de Caeley-Hamilton)

(g) Sea P un sistema LIT, tiempo discreto y dimensión n descrito en variables de estados

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned}$$

donde $A \in R^{n\times n}$ es no-singular o invertible ($\det(A) \neq 0$). Demuestre que el sistema puede conducirse al estado $x_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ en n pasos si y solamente si el determinante de la matriz

$$\begin{bmatrix} A^{-1}B & \left(A^{-1}\right)^2 B & \left(A^{-1}\right)^3 B & \cdots & \left(A^{-1}\right)^n B \end{bmatrix}$$

es distinto de cero.

6. (Obligatorio-Scilab) Un sistema de tiempo continuo

$$\begin{aligned} P &: U \rightarrow Y \\ y &= P(u) \end{aligned}$$

está descrito por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x(t) \\ x\left(0^-\right) &\in R^2 \end{aligned}$$

(a) Determine la función de transferencia del sistema $\widehat{h}_P(s)$ y su respectivo espectro.

(b) Suponga que este sistema P está controlado por un computador digital (también existen compudadores analógicos aunque no lo crean). Determine la función de transferencia, $\widehat{h}_P(z)$, del sistema P discretizado (ZOH+muestreo) que "ve" la computadora cuando el período de muestreo es $h = 0.01$ seg y su respectivo espectro.

(c) ¿Qué relación existe entre $espec\left(\widehat{h}_P(s)\right)$ y $espec\left(\widehat{h}_P(z)\right)$?

(d) Determine las respuestas al impulso del sistema de tiempo continuo P

$$h_P(t) = L^{-1}\left\{\widehat{h}_P(s)\right\}$$

y del discretizado

$$h_P(kh) = Z^{-1}\left\{\widehat{h}_P(z)\right\}$$

Y grafíquelas simultáneamente en el horizonte de tiempo $[0, 5]$. Vea qué sucede en los instantes de muestreo de ambas resuestas y concluya.

7. Resuelva problemas 8.9 (Use Scilab), 8.11 y 8.13 (Use Scilab)

8. Resuelva 8.23 y 8.25 (Scilab)